

函數

組員：
10742 賴宥霖
10741 劉岳旻
10732 張紹維

指導老師：
黃崇健 老師
邱柏翰 老師

目錄

1. 函數的定義
2. 線性函數
3. 二次函數
4. 指數函數
5. 對數函數
6. 函數的極值
7. 函數特殊用法
8. 相關書籍
9. 相關影片
10. 好站相連
11. 圖片、資料來源

函數的定義



圖1-1

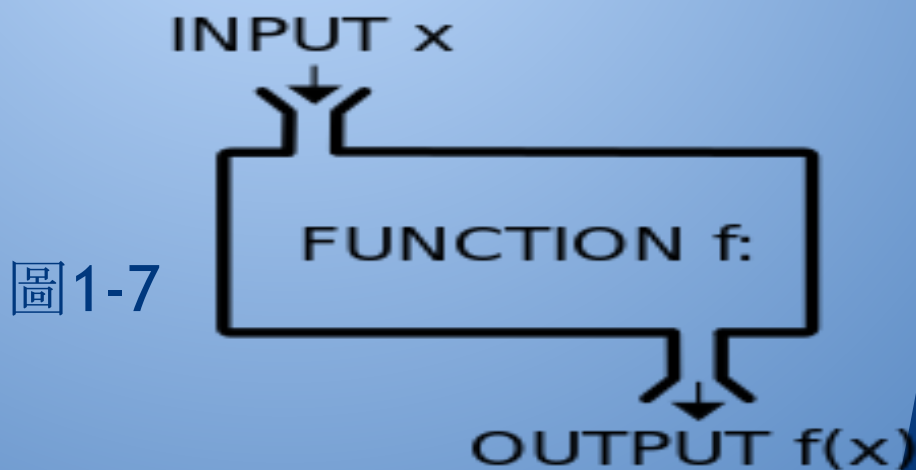
在數學中，一個函數是描述每個輸入值對應唯一輸出值的這種對應關係，符號為 $f(x)$ 。讀作 f of x 。其中 x 為自變數， $f(x)$ 為因變數。包含某個函數所有的輸入值的集合被稱作這個函數的定義域，包含所有的輸出值的集合被稱作值域。

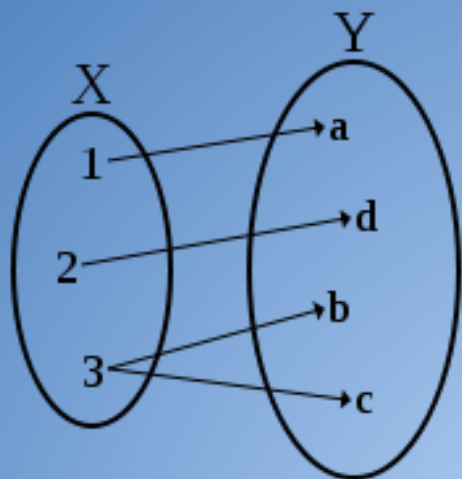
函數是將唯一的輸出值賦予每一輸入的「法則」以及該輸出值與對應輸入值的集合。可以用函數表達式、數學關係，或者一個將輸入值與輸出值對應列出的簡單表格來表示。函數最重要的性質是其決定性，即同一輸入總是對應同一輸出（相反即不成立）。

簡單版說明

假如，有一台販賣機，販賣商品為 $f(x)$ 也就是函數，上面有許多的按鈕為 x ，按一個 x 得到一個 y 【也就是 $f(x)$ ，這樣就稱為【 y 為 x 的函數】

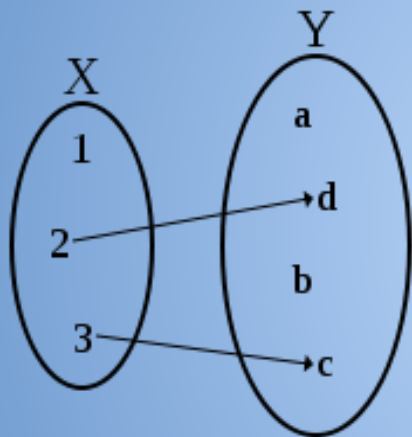
正常的情況是1個 x 對1個 y ，這稱為1對1的情況。但有時候會遇到一些奇怪的狀況，例如：按不同的 x 卻得到同1個 y ，這稱為多對1的情況，但如果按1個 x 卻跑出不同的 y 而形成1對多的狀況話，這時， y 就並不是 x 的函數。





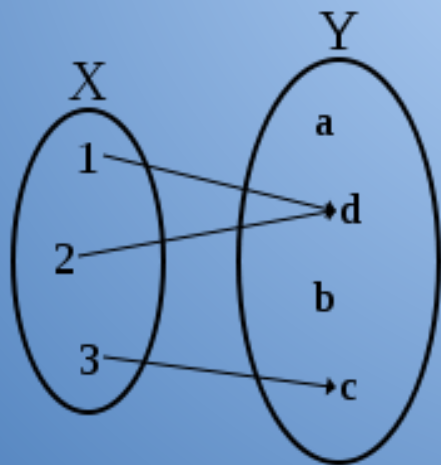
完全又稱一對一，但非多對一。**X**中的元素**3**與**Y**中的兩個元素**b**和**c**相關。因此這是多值函數，而**不是**函數。

圖1-2



多對一，但非完全。**X**的元素**1**未與**Y**的任一元素相關。因此這是偏函數，而**不是**函數。

圖1-3



完全且多對一。因此這是從**X**到**Y**的函數。此函數可以表示為 **$f = \{(1, d), (2, d), (3, c)\}$** 。

圖1-4

函數圖形

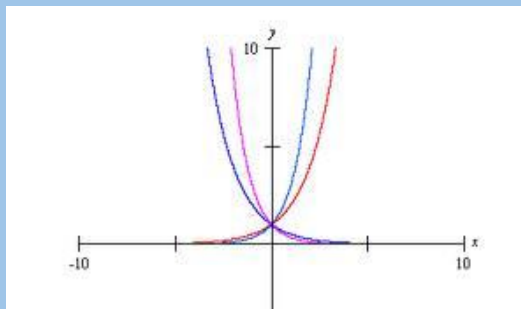


圖1-5

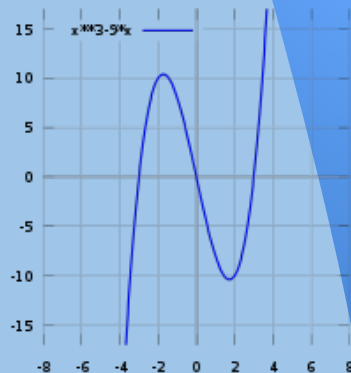


圖1-6

在數學中，**函數** f 的**圖形**(或圖像)指的是所有有序對 $(x, f(x))$ 組成的集合。具體而言，如果 x 為實數，則函數圖形在平面直角坐標系上呈現為一條曲線。如果函數自變數 x 為兩個實數組成的有序對 (x_1, x_2) ，則圖形就是所有三重序 $(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$ 組成的集合，呈現為曲面(參見三維計算機圖形)。

實函數的圖形擁有其唯一的圖像。而對於一般的函數，其圖形形式無法應用，圖形的正式定義取決於數學表述的需要，例如泛函分析中的閉圖像定理。

函數圖形的概念由二元關係圖形推廣而來。需要注意的是，儘管一個函數與其圖像通常是一一對應的，但二者並不可混淆。兩個函數可能擁有相同的圖像，卻有不同的上域(陪域)。例如，對於下文提到的三次多項式，當其上域為實數時函數即為滿射，而若其上域為複數則不然。

通過垂線測試可以判斷一條曲線是否為一個函數，而通過水平線測試可以判斷函數是否為單射且是否存在反函數。如果反函數存在，則其圖像可以通過將原函數圖像以直線 $y=x$ 為軸進行對稱得到。

函數種類：

線性函數

$$f(x) = kx + b$$

線性函數分為常數函數一次函數。

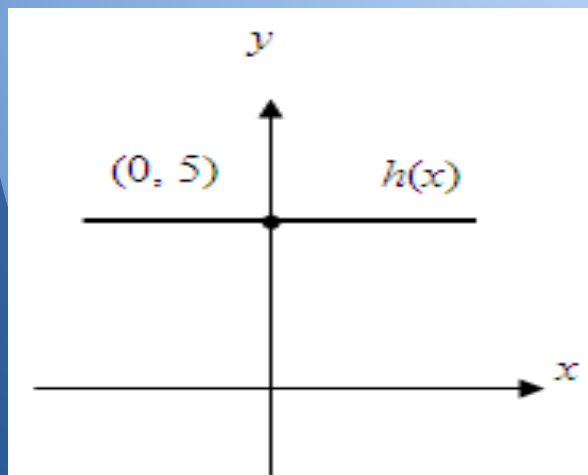
常數函數就是函數裡只有常數的函數，也就是沒有變數(x)的函數，又稱為零次多項式，其圖形為一水平線。

注意!! 零次多項式不是零多項式喔!

一次函數是只擁有一個變數的一階多項式函數。因為，採用直角坐標系，這些函數的圖形是直線，所以，這些函數是線性的。

(公式參照上圖)

其中， k 是斜率， b 是 y -截距，函數的圖形與 y -軸相交點的 y -坐標。改變斜率 k 會使直線更陡峭或平緩。改變 y -截距 b 會將直線移上或移下。



一次函數

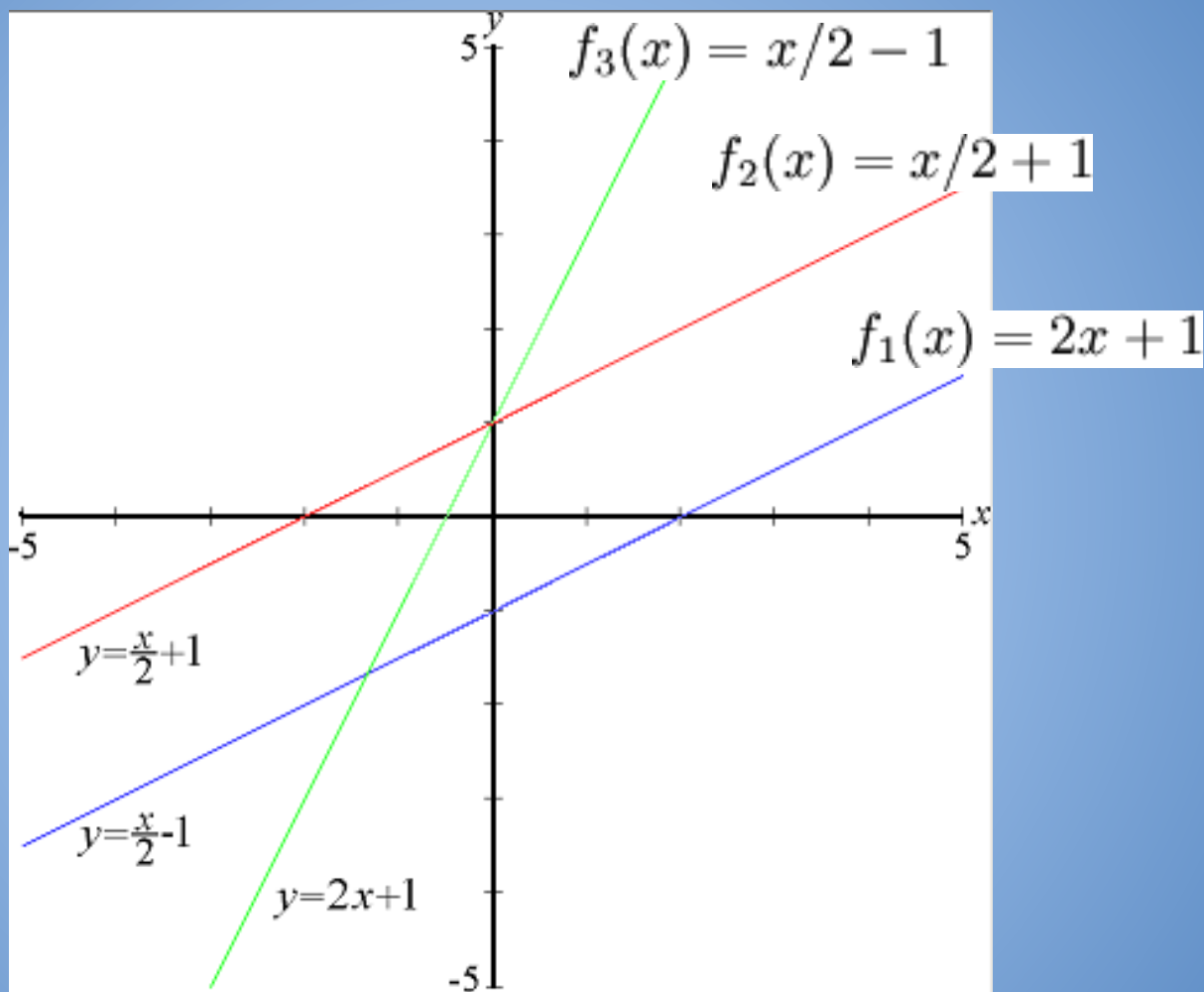


圖1-15

函數種類:二次函數

在數學中, 二次函數(quadratic function)表示形為 $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a 不等於0)的多項式函數。二次函數的圖像是一條主軸平行於 y 軸的拋物線。

二次函數表達式 $ax^2 + bx + c$ 的定義是一個二次多項式, 因為 x 的最高次數是2。如果令二次函數的值等於零, 則可得一個二次方程。該方程的解稱為方程的根或函數的零點。

二次函數可以表示成以下三種形式:

$f(x) = ax^2 + b x + c$ 稱為一般形式或多項式形式(a 不等於0)

$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ 稱為因子形式, 其中 r_1 和 r_2 是二次方程的兩個根 (a 不等於0)

$f(x) = a(x - h)^2 + k$ 稱為標準形式或頂點形式, (h,k) 即為此二次函數的頂點。 (a 不等於0)

函數種類： 指數函數



圖1-14

應用到值 x 上的這個函數寫為 $\exp(x)$ 。還可以等價的寫為 e^x ，這裡的 e 是數學常數，就是自然對數的底數，近似等於2.718281828，還叫做歐拉數。

作為實數變數 x 的函數， $y=e^x$ 的圖像總是正的（在 x 軸之上）並遞增（從左向右看）。它永不觸及 x 軸，儘管它可以任意程度的靠近它（所以， x 軸是這個圖像的水平漸近線。它的反函數是自然對數 $\ln(x)$ ，它定義在所有正數 x 上。定義於所有的 $a > 0$ ，和所有的實數 x 。它叫做底數為 a 的指數函數。注意這個 a^x 的定義依賴於先前確立的定義於所有實數上的函數 e^x 的存在。

指數律： 1. $a^{x+y} = a^x a^y$ 2. $a^{x-y} = a^x / a^y$ 3. $(a^x)^y = a^{xy}$

注意！！

當 $a^{n/m}$ 成立，則 $a > 0$ 且 $m \neq 0$

函數種類：

對數函數

1. 對數定義：

若 $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, x 為實數,

定義： $a^x = b \iff x = \log_a b$ (以 a 為底, b 的對數)。其中 a 為底數, b 為真數。

2. 自然限制：

$\log_a b$ 有意義 $\iff a > 0$ 或 $a \neq 1$ 或 $b > 0$ 。(底數 > 0 且不為1, 真數 > 0)

<例>

$\log_{(-2)} 3$, $\log_1 5$, $\log_4 (-8)$ 都是無意義的。

3. 對數律：

$a > 0$ 且 $a \neq 1$, x 和 y 都是正實數, r 是任意實數, 則以下結果成立

(1) $\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$

(2) $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$

(3) $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$

(4) $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

(5) $\log_{a^m} x = (1/m) \log_a x$

◎ (6) ($a, c > 0$ 且 $a, c \neq 1$) $\log_a b = \log_c b / \log_c a$

a可以控制函數圖形的開口方向

如果 $a > 0$, 則拋物線是開口朝上。

如果 $a < 0$, 則拋物線是開口朝下。

a也可以控制函數圖形的開口大小

如果 a 愈大, 圖形的開口愈小

如果 a 愈小, 圖形的開口愈大

係數**b**和**a**控制了拋物線的對稱軸(以及頂點的x坐標)。

係數**b**控制了拋物線穿過y軸時的傾斜度(斜率)。

係數**c**控制了拋物線的高度, 它是拋物線與y軸的交點。

係數**c**控制了頂點的高度。

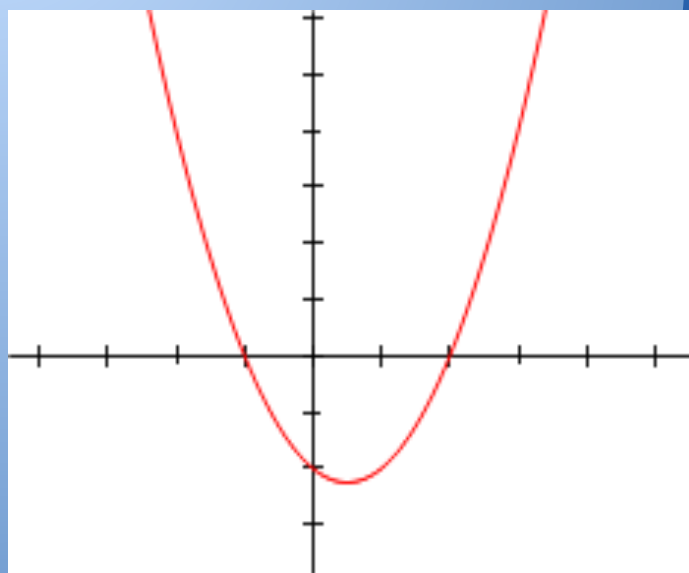


圖1-11

函數的極大極小值和配方法

配方法: $\Delta = b^2 - 4ac$, 為一元二次方程式的判別式, 又記作D。

如果 $\Delta > 0$, 則方程有兩個不相等的根, 也即與X軸有兩個不重合的交點, 因為 $\sqrt{\Delta}$ 是正數。

如果 $\Delta = 0$, 則方程有兩個相等的根, 也即與X軸有一個交點, 因為 $\sqrt{\Delta}$ 是零。

如果 $\Delta < 0$, 則方程沒有實數根, 也即與X軸沒有交點, 因為 $\sqrt{\Delta}$ 是二共軛虛根。

配方法可用來求極大極小值, 而函數的極大極小值出現在X有範圍限制時, 例如: $ax^2 + bx + c$ 而 $0 < x < 5$ 則就會出現極大極小值, 先利用配方法將 $ax^2 + bx + c$ 簡化成頂點形式 **$a(x-h)^2 + k=0$** 即可

求出X在函數圖形上的範圍, 就完成求出極大極小值了!!!

$$\begin{aligned}x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ x + \frac{b}{2a} &= \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\end{aligned}$$

函數特殊用法:

1.拉格朗日插值多項式

拉格朗日插值法是以法國十八世紀數學家約瑟夫·拉格朗日命名的一種多項式插值方法。許多實際問題中都用函數來表示某種內在聯繫或規律，而不少函數都只能通過實驗和觀測來了解。如對實踐中的某個物理量進行觀測，在若干個不同的地方得到相應的觀測值，拉格朗日插值法可以找到一個多項式，其恰好在各個觀測的點取到觀測到的值，這樣的多項式稱為拉格朗日(插值)多項式。相較於之前的牛頓插值法，拉格朗日插值法適用於多點求多項式時，但當插值點有變化時時，所對應的多項式就需要全部重新計算，非常麻煩。(下圖為公式)

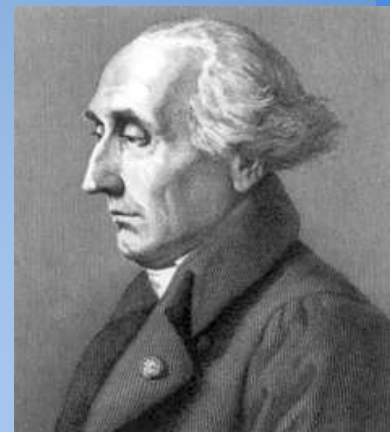


圖1-10

公式1-9

$$f(x) = y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

拉格朗日插值多項式公式

拉格朗日插值多項式的證明:<http://www.youtube.com/watch?v=3QefBbljJOU>

牛頓差值多項式 (階梯差值多項式公式)

(1)圖形通過 (a_1, b_1) 、 (a_2, b_2) 、 (a_3, b_3) 三點的二次多項式為

$$f(x)=p(x-a_1)(x-a_2)+q(x-a_1)+r$$

，再依次代入 $f(a_1)=b_1$ ， $f(a_2)=b_2$ ， $f(a_3)=b_3$ 求得 p 、 q 、 r 。

(2)圖形通過 (a_1, b_1) 、 (a_2, b_2) 、 (a_3, b_3) 、 (a_4, b_4)

四點的三次多項式為

$$f(x)=p(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)+q(x-a_1)(x-a_2)+r(x-a_1)+s$$

，再依次代入 $f(a_1)=b_1$ ， $f(a_2)=b_2$ ， $f(a_3)=b_3$ ， $f(a_4)=b_4$

求得 p 、 q 、 r 、 s 。

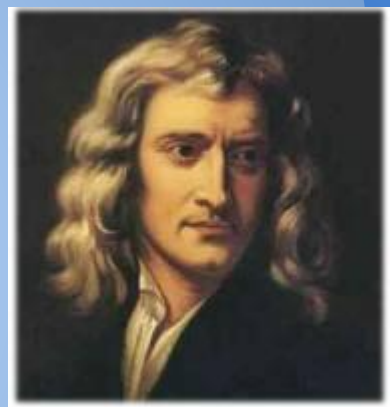


圖1-10

函數特殊用法：

一次因式檢驗法

(1) 整係數一次因式檢驗法(牛頓定理)

設 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ 是一個整係數多項式，而 p, q 是互質且皆不為零的整數，若 $px - q$ 是 $f(x)$ 的因式，則 $p \mid a_n$ 且 $q \mid a_0$ 。

注意!!

1. 使用此法時， p 與 q 要互質時才可使用，否則不一定成立。
2. 若 $p \mid a_n$ 且 $q \mid a_0$ ，則 $px - q$ 未必是 $f(x)$ 的因式，而是有可能是 $f(x)$ 的因式。此時要再利用因式定理的觀念或綜合除法做進一步篩選方可確定核者是因式。

相關書籍

基本函數論

王承之著 民國60[西元1971]

變量中的常量－函數的故事

張遠南編著 民國82(西元1993)

舞動Excel公式與函數的使用藝術

景增編著 民國95(西元2006)

黃

Excel 2007函數範例：精打細算過生活

蔡士源編著 民國97(西元2008)

函數與圖形探趣

嚴夢輝Author Center 譯 民國69(西元1980)

相關影片

《中天新聞》超難數學！國小四年級考題 建中生也投降：

<http://www.youtube.com/watch?v=l8CrPzTXr84>

奇幻魔術秀 上一堂不一樣的數學課：

<http://www.youtube.com/watch?v=05B2OI2SY2Y>

數學領域對有效教學的探討焦點：

<http://www.youtube.com/watch?v=FOVOzAMAEI8>

2-2D例題01拉格朗日插值多項式的證明：

<http://www.youtube.com/watch?v=3QefBbljJOU>

數學的故事：

http://www.youtube.com/watch?v=CVqSK_IQeel

好站相連

上奇數位學習系：

<http://210.240.125.13/ExcelFormula/>

excel函數介紹：

<http://allen.chen.name/ExcelFunction/>

中國科普博覽：

http://159.226.2.2:82/gate/big5/www.kepu.net.cn/gb/basic/szsx/2/23/2_23_1003.htm

趣味數學遊戲 - 國立臺灣科學教育館：

<http://activity.ntsec.gov.tw/math/>

中華數學協會：

<http://www.tmo.com.tw/modules/index.php>

圖片來源1

圖1-1至1-4and1-6至1-7: <http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%87%BD%E6%95%B8>

圖 1-5:

https://www.google.com.tw/search?q=%E5%87%BD%E6%95%B8%E5%9C%96%E6%A1%88&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=llupUtKclYz8oATW-oGoBg&ved=0CAkQ_AUoAQ&biw=1440&bih=781

圖 1-8:

https://www.google.com.tw/search?biw=1440&bih=781&tbm=isch&sa=1&q=%E6%8B%89%E6%A0%BC%E6%9C%97%E6%97%A5%E6%8F%92%E5%80%BC%E5%A4%9A%E9%A0%85%E5%BC%8F%E5%85%AC%E5%BC%8F&oq=%E6%8B%89%E6%A0%BC%E6%9C%97%E6%97%A5%E6%8F%92%E5%80%BC%E5%A4%9A%E9%A0%85%E5%BC%8F%E5%85%AC%E5%BC%8F&gs_l=img..3...0.0.1.241.0.0.0.0.0.0.0.0....0...1c..32_.img..3.1.292.txT06KsMXEQ

<https://www.google.com.tw/search?q=%E6%8B%89%E6%A0%BC%E6%9C%97%E6%97%A5%E6%8F%92%E5%80%BC%E6%B3%95&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=wFqpUqDpElGFoQS07oGwBw&ved=0CAkQAUoAQ&biw=1440&bih=780&dpr=1#imgdii=>

公式1-9:

<https://www.google.com.tw/search?q=%E5%87%BD%E6%95%B8%E5%85%AC%E5%BC%8F&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=OYuyUrfVCIWZLAX654HYDA&ved=0CAkQAUoAQ&biw=1440&bih=781>

圖 1-10:

https://www.google.com.tw/search?biw=1440&bih=781&tbm=isch&sa=1&q=%E7%89%9B%E9%A0%93&oq=%E7%89%9B%E9%A0%93&gs_l=img.3..0l10.838913.848711.0.849643.4.4.0.0.0.0.386.1080.0j2j0j2.4.0...0...1c.1j4.32. img..0.4.1080.L01c_14acWY

圖片來源2

圖1-11:

<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%BA%8C%E6%AC%A1%E5%87%BD%E6%95%B0>

圖1-14:

<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%8C%87%E6%95%B0%E5%87%BD%E6%95%B0>

圖1-12、1-13:

<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%85%8D%E6%96%B9%E6%B3%95>

封面:

http://www.lanrentuku.com/vector/life/20110122_4989.html

資料來源

1. 維基百科:<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%8B%89%E6%A0%BC%E6%9C%97%E6%97%A5%E6%8F%92%E5%80%BC%E6%B3%95>

2. <http://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=12394>